多元统计分析第二次作业

学习交流，无限进步

2024 年 9 月 15 日

Exercise 1

4. 设 $W \sim W_p(n, \Sigma)$, 并令 $W = (w_{ij})$ 和 $\Sigma = (\sigma_{ij})$, 其中 $i, j = 1, \cdots, p$.
(1) 试证明: $w_{ii} \sim \sigma_{ii}\chi_n^2, i = 1, \cdots, p$
(2) 试计算: $E(w_{ij})$ 和 $\operatorname{Cov}(w_{ij}, w_{kl})$. 提示: $\operatorname{Cov}(w_{ij}, w_{kl}) = n(\sigma_{ik}\sigma_{jl} + \sigma_{il}\sigma_{jk})$.

证明. (1) 设有 $X = \begin{pmatrix} X_1' \\ X_2' \\ \vdots \\ X_n' \end{pmatrix}$ 其中 $X_i = (X_{i1}, X_{i2}, \cdots, X_{ip}) \sim N_p(0, \Sigma) \quad (i = 1 \cdots n)$，是相互独立的 n 个样本，且 $W = X'X = \Sigma_{i=1}^n X_i' X_i$。
于是 $X_{i1}, X_{i2}, \cdots, X_{in} \overset{iid}{\sim} N(0, \sigma_{i1})$。
而 $w_{ii} = \Sigma_{k=1}^n X_{ki}^2$ 于是由卡方分布的定义，$w_{ii} \sim \sigma_{ii}\chi_n^2$
(2)

$$\begin{aligned} E(w_{ij}) =& E(\Sigma_{k=1}^n X_{ki}X_{kj}) \\ =& \Sigma_{k=1}^n E(X_{ki}X_{kj}) \\ =& \Sigma_{k=1}^n Cov(X_{ki}, X_{kj}) \\ =& \Sigma_{k=1}^n \sigma_{ij} \\ =& n\sigma_{ij} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Cov(w_{ij}, wkl) =& Cov(\Sigma_{t=1}^n X_{ti}X_{tj}, \Sigma_{s=1}^n X_{sk}X_{sl} \\ =& \Sigma_{t=1}^n(\Sigma_{s=1}^n Cov(X_{ti}X_{tj}, X_{sk}X_{sl})) \quad * \end{aligned}$$

由于 $s \neq t$ 时 X_t 与 X_s 独立。

$$\begin{aligned} * =& \Sigma_{t=1}^{n} Cov(X_{ti}X_{tj}, X_{tk}X_{tl}) \\ =& \Sigma_{t=1}^{n} (\sigma_{ik}\sigma_{jl} + \sigma_{il}\sigma_{jk}) \\ =& n\left(\sigma_{ik}\sigma_{jl} + \sigma_{il}\sigma_{jk}\right) \end{aligned}$$

□

Exercise 2

5. (1) 设 W，$x_1, \cdots, x_m$ 相互独立，$W \sim W_p(n, I_p)$，$x_i \sim N_p(0, I_p)$，其中 $i = 1, \cdots, m$，$n \geqslant p$。试求 $W^{-1/2}X'$ 的密度函数，其中 $X' = (x_1, \cdots, x_m)$。
(2) 设 W_1 和 W_2 相互独立，且 $W_1 \sim W_p(n, I_p)$ 和 $W_2 \sim W_p(m, I_p)$，其中 $n, m \geqslant p$。试求 $W_1^{-1/2}W_2W_1^{-1/2}$ 的密度函数。

证明. (1) 由于 $Vec(X') \sim N(0, I_m \otimes I_p)$ 。于是在给定 W 时，$Y = Vec(W^{-1/2}X')$ 有条件分布 $Y|W \sim N(0, I_m \otimes W^{-1})$ ，记 $Y = (Y_1', \cdots, Y_m')'$
故代入 W 的密度函数

$$f(W) = \frac{1}{2^{np/2}\Gamma_p\left(\frac{n}{2}\right)|I_p|^{n/2}}|W|^{(n-p-1)/2}\exp\left\{-\frac{1}{2}\mathrm{tr}\left(I_p^{-1}W\right)\right\}$$

后有:

$$
\begin{aligned}
f(Y) &= \int_w f(Y, W)\, dw = \int_w f(Y|w) f(w)\, dw \\
&= \int_w \frac{1}{2^{(np+1)/2}\sqrt{\pi}\Gamma_p(\frac{n}{2})} |w|^{\frac{n+m-p-1}{2}} \exp\{-\frac{1}{2}[Y'(I_m \otimes w)Y + tr(w)]\}\, dw \\
&= \frac{1}{2^{(np+1)/2}\sqrt{\pi}\Gamma_p(\frac{n}{2})} \int_w |w|^{\frac{n+m-p-1}{2}} \exp\{-\frac{1}{2}[\Sigma_{i=1}^m Y_i' w Y_i + tr(w)]\}\, dw \\
&= \frac{1}{2^{(np+1)/2}\sqrt{\pi}\Gamma_p(\frac{n}{2})} \int_w |w|^{\frac{n+m-p-1}{2}} \exp\{-\frac{1}{2}[\Sigma_{i=1}^m tr(Y_i' w Y_i) + tr(w)]\}\, dw \\
& \frac{1}{2^{(np+1)/2}\sqrt{\pi}\Gamma_p(\frac{n}{2})} \int_w |w|^{\frac{n+m-p-1}{2}} \exp\{-\frac{1}{2}[\Sigma_{i=1}^m tr(Y_i Y_i' w) + tr(w)]\}\, dw = \\
& \frac{1}{2^{(np+1)/2}\sqrt{\pi}\Gamma_p(\frac{n}{2})} \int_w |w|^{\frac{n+m-p-1}{2}} \exp\{-tr(\frac{\Sigma_{i=1}^m Y_i Y_i' + I_p}{2} w)\}\, dw \\
&= \frac{1}{2^{(np+1)/2}\sqrt{\pi}\Gamma_p(\frac{n}{2})} \int_w |w|^{\alpha} \exp\{-tr(Aw)\}\, dw \quad *
\end{aligned}
$$

其中 $\alpha = \frac{n+m-p-1}{2}$, $A = \frac{\Sigma_{i=1}^m Y_i Y_i' + I_p}{2}$。

由积分公式:

$$
\int |w|^{\alpha} \exp\left(-\operatorname{tr}(Aw)\right) dw = \frac{\Gamma_p\left(\alpha + \frac{p+1}{2}\right)}{|A|^{\alpha + \frac{p+1}{2}}}
$$

有:

$$
\begin{aligned}
* &= \frac{1}{2^{(np+1)/2}\sqrt{\pi}\Gamma_p(\frac{n}{2})} \times \frac{\Gamma_p\left(\frac{n+m-p-1}{2} + \frac{p+1}{2}\right)}{\left|\frac{\Sigma_{i=1}^m Y_i Y_i' + I_p}{2}\right|^{\frac{n+m-p-1}{2} + \frac{p+1}{2}}} \\
&= \frac{2^{(mp-1)/2}}{\sqrt{\pi}} \frac{\Gamma_p(\frac{n+m}{2})}{\Gamma_p(\frac{n}{2})} \frac{1}{|Y'Y + I_p|^{\frac{n+m}{2}}}
\end{aligned}
$$

于是该分布为矩阵 t 分布。

(2)

由于 $W_2 \sim W_p(m, I_p)$，故不妨设有 $W_2 = X'X$ 。于是 $W_1^{-1/2} W_2 W_1^{-1/2} = W_1^{-1/2} X' X W_1^{-1/2}$
于是在给定 W_1 时 $Y = Vec(W_1^{-1/2} X')$ 的条件分布为 $N(0, I_m \otimes W_1^{-1})$。因此 $M = W_1^{-1/2} W_2 W_1^{-1/2}$ 的条件分布为 $W_p(m, W_1^{-1})$ 。

于是:

$$
\begin{aligned}
f(M) &= \int_{w_1} f(M, w_1)\, dw = \int_{w_1} f(M|w_1) f(w_1)\, dw \\
&= \int_{w_1} \Big(\frac{|w_1|^{m/2}}{2^{mp/2}\Gamma(\frac{m}{2})} |M|^{(m-p-1)/2} \exp\{-\frac{1}{2} tr(w_1 M)\} \\
&\quad \times \frac{1}{2^{np/2}\Gamma(\frac{n}{2})} |w_1|^{(n-p-1)/2} \exp\{-\frac{1}{2} tr(w_1)\}\Big)\, dw_1 \\
&= \frac{|M|^{(m-p-1)/2}}{2^{(mp+np)/2}\Gamma(\frac{m}{2})\Gamma(\frac{n}{2})} \int_{w_1} |w_1|^{(n+m-p-1)/2} \exp\{-tr(\frac{M+I_p}{2} w_1)\}\, dw_1 \\
&= \frac{|M|^{(m-p-1)/2}}{2^{(mp+np)/2}\Gamma(\frac{m}{2})\Gamma(\frac{n}{2})} \times \frac{\Gamma_p\left(\frac{n+m-p-1}{2} + \frac{p+1}{2}\right)}{|\frac{M+I_p}{2}|^{(n+m-p-1)/2 + \frac{p+1}{2}}} \\
&= \frac{\Gamma_p\left(\frac{n+m}{2}\right)}{\Gamma(\frac{m}{2})\Gamma(\frac{n}{2})} \frac{|M|^{(m-p-1)/2}}{|M+I_p|^{(n+m)/2}}
\end{aligned}
$$

□

Exercise 3

设 $W \sim W_p(n, I_p)$，其中 $W = (w_{ij})$，定义 $r_{ij} = \frac{w_{ij}}{\sqrt{w_{ii}w_{jj}}}$，则 $R = (r_{ij})_{p\times p}$。
(1) 试证明：$w_{11}, \cdots, w_{pp}, R$ 相互独立；
(2) 试证明：$w_{11}, \cdots, w_{pp}$ 相互独立且同 χ^2_n 分布；
(3) 试求 R 的分布。

证明. (1) 当 $i = j$ 时 $R_{ij} = 1$，显然与 $w_1 1, \cdots, w_p p$ 独立。故只需考虑 $i \neq j$ 时。

设 $X = \begin{pmatrix} X'_1 \\ X'_2 \\ \vdots \\ X'_n \end{pmatrix}$ 其中 $X_1, X_2, \cdots, X_n \overset{iid}{\sim} N_p(0, I_p)$，且 $W = X'X$ 令 u_i 为矩阵 X 的第 i 列。

于是当 $i \neq j$ 时

$$r_{ij}=\frac{\Sigma_{k=1}^{n}x_{ki}x_{kj}}{\sqrt{\Sigma_{k=1}^{n}x_{ki}^2\Sigma_{k=1}^{n}x_{kj}^2}}=\frac{u_i'u_j}{\|u_i\|\|u_j\|}$$

显然，r_{ij} 对任意 $s\neq i,j,k=1\cdots n$ 有 r_{ij} 与 x_{ks} 独立，即与 $w_{ss}=\Sigma_{k=1}^{n}x_{ks}^2$ 独立。于是只用考虑 $s=i;s=j$ 的情况。

首先给定 u_i ，以 $\frac{u_i'}{\|u_i\|}$ 为第一行构造正交矩阵 Q ，令 $v=Qu_j$ 。记 $v=(v_1,v_2,\cdots,v_n)'$ 于是 $v_1,v_2,\cdots,v_n\overset{iid}{\sim}N(0,1)$ 且 $v_1=\frac{u_i'u_j}{\|u_i\|}$ 。代入 r_{ij} 得:

$$\begin{aligned}r_{ij}=&\frac{v_1}{\sqrt{v'v}}=\frac{v_1}{\sqrt{v_1^2+\Sigma_{i=2}^{n}v_i^2}}\\=&\frac{t}{\sqrt{t^2+n-1}}\end{aligned}$$

其中 $t=\frac{v_1}{\sqrt{\Sigma_{i=2}^{n}v_i^2/(n-1)}}\sim t_{n-1}$ 。于是 r_{ij} 的条件分布与 u_i 无关。这说明 r_{ij} 与 u_i 独立，于是与 $w_{ii}=u_i'u_i$ 独立。同理可知 r_{ij} 与 w_{jj} 独立。

(2) 由于 $w_{ii}=u_i'u_i=\sqrt{\Sigma_{k=1}^{n}x_{ki}^2}i=1,2,\cdots p$ 由于 $x_{1i},x_{2i},\cdots x_{ni}\overset{iid}{\sim}N(0,1)$。且 $\forall k=1,\cdots n,i\neq j,x_{ki}\text{独立于}x_{kj}$。于是 $w_{11}\cdots w_{pp}\overset{iid}{\sim}\chi_n$

(3) $\forall i=1,\cdots p,P(r_ii=1)=1$。

$\forall i\neq j,r_{ij}=\frac{t}{\sqrt{t^2+n-1}},\text{其中}t\sim t_{n-1}$。于是 t 的密度函数为

$$\frac{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}{\sqrt{(n-1)\pi}\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)}\left(1+\frac{t^2}{n-1}\right)^{-\frac{n}{2}}$$

t 关于 r_{ij} 的函数：$t=\sqrt{\frac{(n-1)r_{ij}^2}{1-r_{ij}^2}}$ 。按照逆变换定理可算的 r_ij 的密度:

$$\begin{aligned}f_{r_{ij}}(r)=&f_t(t(r))\frac{\partial t}{\partial r}\\=&\frac{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}{\sqrt{(n-1)\pi}\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)}\left(\frac{1}{1-r^2}\right)^{-\frac{n}{2}}\times\frac{\sqrt{n-1}}{(1-r^2)^{3/2}}\\=&\frac{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}{\sqrt{\pi}\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)}\left(\frac{1}{1-r^2}\right)^{\frac{3-n}{2}}\end{aligned}$$

而对于 r_{ij},r_{st} ，在 $i=j$ 或 i,j,s,t 互不相等时显然互相独立，当 $i\neq j,i=s,t\neq s,t\neq j$ 时，依旧可以在给定 u_i 时按照以上方法构造正交阵，则 $v_j=Qu_j,v_t=Qu_t$ 条件独立。于是 r_{ij},r_{it} 条件独立

$$f_{r_{ij},r_{it}}(r_{ij},r_{it})=f(r_{ij},r_{it}|u_i)=f(r_{ij}|u_i)f(r_{it}|u_i)=f(r_{ij})f(r_{it})$$

即 r_{ij},r_{it} 独立

于是

$$f(R)=\prod_{i<j}f_{r_{ij}}(r_{ij})=\prod_{i<j}\frac{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}{\sqrt{\pi}\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)}\left(\frac{1}{1-r_{ij}^2}\right)^{\frac{3-n}{2}}$$

□

Exercise 4

10. 设 W_i 相互独立，且 $W_i\sim W_p(n_i,I_p)$，其中 $n_i\geqslant p,i=0,1,\cdots,k$。

(1) 令 $M_j=\left(\sum_{i=1}^k W_i\right)^{-1/2}W_j\left(\sum_{i=1}^k W_i\right)^{-1/2},j=1,\cdots,k$. 试求 $(M_1,\cdots,M_k)$ 的联合密度函数;

(2) 令 $V_j=W_0^{-1/2}W_jW_0^{-1/2},j=1,\cdots,k$. 试求 $(V_1,\cdots,V_k)$ 的联合密度函数。

证明. (1) 设 $S=\sum_{i=1}^k W_i\sim W_p(\Sigma_{i=1}^k n_i,I_p)$ ，先求 S 给定时 $(M_1,\cdots,M_k)$ 的条件分布函数。

$$f(M_1,\cdots,M_k|S=s)=f(W_1,\cdots,W_k|S=s)|\mathbf{J}(W\to M)|$$

其中 $W=(W_1,\cdots,W_k),M=(M_1,\cdots,M_k)$ ，满足 $W_i=S^{1/2}M_i(S^{1/2})'$
由结论：设 $X=BYB'$，其中 X 和 Y 为 $m\times m$ 的随机矩阵，B 为已知的 $m\times m$ 非奇异矩阵，则

$$J(X\to Y)=|\det(B)|^{m+1}.$$

知：$|\mathbf{J}(W_i\to M_i)|=|s|^{(p+1)/2}$; $|\mathbf{J}(W_i\to M_j)|=0\,(i\neq j)$ 。于是：$|\mathbf{J}(W\to M)|=|s|^{k(p+1)/2}$
而

$$
\begin{aligned}
f(M_1,\cdots,M_k|S=s)/(|\mathbf{J}(W\to M)|) =& \frac{f(W_1,\cdots,W_k,S=s)}{f(S=s)}\\
=& \frac{f(W_1,\cdots,W_{k-1},W_k=s-\Sigma_{i=1}^{k-1}W_i)}{f(S=s)}\\
=& \frac{\prod_{i=1}^{k-1} f(W_i)f(s-\Sigma_{i=1}^{k-1}W_i))}{f(S=s)}\\
=& \frac{\prod_{i=1}^{k-1}\frac{1}{2^{n_ip/2}\Gamma_p\left(\frac{n_i}{2}\right)}|W_i|^{(n_i-p-1)/2}\exp\left\{-\frac{1}{2}\mathrm{tr}\left(W_i\right)\right\}}{f(S=s)}\times\\
& \frac{\frac{1}{2^{n_kp/2}\Gamma_p\left(\frac{n_k}{2}\right)}|s-\Sigma_{i=1}^{k-1}W_i|^{(n_k-p-1)/2}\exp\left\{-\frac{1}{2}\mathrm{tr}\left(s-\Sigma_{i=1}^{k-1}W_i\right)\right\}}{1}\\
=& \frac{|s|^{\frac{(\Sigma_{i=1}^k n_i-kp-k)}{2}}|(\prod_{i=1}^{k-1}M_i)|^{\frac{(n_i-p-1)}{2}}|(I_p-\Sigma_{i=1}^{k-1}M_i)|^{\frac{(n_k-p-1)}{2}}}{2^{(\Sigma_{i=1}^k n_i)p/2}\prod_{i=1}^k\Gamma_p\left(\frac{n_i}{2}\right)f(S=s)}\\
=& \frac{|s|^{(\Sigma_{i=1}^k n_i-kp-k)/2}\prod_{i=1}^k|M_i|^{(n_i-p-1)/2}}{2^{(\Sigma_{i=1}^k n_i)p/2}\prod_{i=1}^k\Gamma_p\left(\frac{n_i}{2}\right)f(S=s)}\exp\{-\frac{1}{2}tr(s)\}\quad *
\end{aligned}
$$

又 $f(S=s)=\frac{1}{2^{(\Sigma_{i=1}^k n_i)p/2}\Gamma_p\left(\frac{\Sigma_{i=1}^k n_i}{2}\right)}|s|^{(\Sigma_{i=1}^k n_i)-p-1)/2}\exp\left\{-\frac{1}{2}\mathrm{tr}\left(s\right)\right\}$

代入 * 得:

$$
*=\frac{|s|^{(1-k)(p+1)/2}\Gamma_p\left(\frac{\Sigma_{i=1}^k n_i}{2}\right)\prod_{i=1}^k|M_i|^{(n_i-p-1)/2}}{\prod_{i=1}^k\Gamma_p\left(\frac{n_i}{2}\right)}
$$

于是

$$
f(M_1,\cdots,M_k|S=s)=\frac{|s|^{(p+1)/2}\Gamma_p\left(\frac{\Sigma_{i=1}^k n_i}{2}\right)\prod_{i=1}^k|M_i|^{(n_i-p-1)/2}}{\prod_{i=1}^k\Gamma_p\left(\frac{n_i}{2}\right)}
$$

(2) 由第二题知 V_j 与 W_0 独立，且其密度函数为:

$$
f(V_j)=\frac{\Gamma_p\left(\frac{n_0+n_j}{2}\right)}{\Gamma(\frac{n_j}{2})\Gamma(\frac{n_0}{2})}\frac{|V_j|^{(n_j-p-1)/2}}{|V_j+I_p|^{(n_0+n_j)/2}}
$$

又给定 W_0 时 $V_1,\cdots,V_k$ 条件独立，于是:

$$
\begin{aligned}
f(V_1,\cdots,V_k) =& f(V_1,\cdots,V_k|W_0) \\
=& \prod_{i=1}^{k} f(V_i|W_0) \\
=& \prod_{i=1}^{k} f(V_i) \\
=& \prod_{i=1}^{k} \frac{\Gamma_p\left(\frac{n_0+n_j}{2}\right)}{\Gamma(\frac{n_j}{2})\Gamma(\frac{n_0}{2})} \frac{|V_j|^{(n_j-p-1)/2}}{|V_j+I_p|^{(n_0+n_j)/2}}
\end{aligned}
$$

□

Exercise 5

11. 设 W_1 和 W_2 相互独立，且 $W_1 \sim W_p(n,\Sigma)$ 和 $W_2 \sim W_p(m,\Sigma)$，其中 $\Sigma > 0$，$n \geq p$ 和 $m \geq p$。

(1) 试证明：W_1+W_2 与 $(W_1+W_2)^{-1/2}W_1(W_1+W_2)^{-1/2}$ 相互独立；

(2) 试由 $(W_1+W_2)^{-1/2}W_1(W_1+W_2)^{-1/2}$ 的密度函数，计算 $\Lambda(p,n,m)$ 的矩；

(3) 令 $W_1+W_2 = UU'$，其中 U 为对角线元素为正的下三角矩阵。试证明：W_1+W_2 与 $U^{-1}W_1U^{-1}$ 相互独立；

(4) 试证明：W_1+W_2 与 CW_1C' 相互独立，其中 C 满足条件 $C(W_1+W_2)C' = I_p$。

证明. (1) 令 $X = W_1+W_2, Y = (W_1+W_2)^{-1/2}W_1(W_1+W_2)^{-1/2}$ 。于是 $W_1 = X^{1/2}YX^{1/2}, W_2 = X - W_1$ 。由矩阵微商性质知。

$$\frac{\partial W_1}{\partial X} = *$$
$$\frac{\partial W_1}{\partial Y} = X^{1/2} \otimes X^{1/2}$$
$$\frac{\partial W_2}{\partial X} = I_{p^2} - *$$
$$\frac{\partial W_2}{\partial Y} = -X^{1/2} \otimes X^{1/2}$$
$$J((W_1, W_2) \to (X, Y)) = \begin{pmatrix} \frac{\partial W_1}{\partial X} & \frac{\partial W_1}{\partial Y} \\ \frac{\partial W_1}{\partial X} & \frac{\partial W_1}{\partial Y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} * & X^{1/2} \otimes X^{1/2} \\ I_{p^2} - * & -X^{1/2} \otimes X^{1/2} \end{pmatrix}$$
$$|det(J((W_1, W_2) \to (X, Y))| = |\frac{\partial W_1}{\partial Y}| = |X|^p$$

因此

$$\begin{aligned} f(X, Y) =& f(W_1, W_2)|det(J((W_1, W_2) \to (X, Y))| \\ =& \frac{1}{2^{(n+m)p/2}\Gamma_p\left(\frac{n}{2}\right)\Gamma_p\left(\frac{m}{2}\right)|\Sigma|^{(m+n)/2}}|W_1|^{(n-p-1)/2}|W_2|^{(m-p-1)/2} \times \\ & \exp\left\{-\frac{1}{2}\operatorname{tr}\left(\Sigma^{-1}W_1\right) - \frac{1}{2}\operatorname{tr}\left(\Sigma^{-1}W_2\right)\right\}|X|^p \\ =& \frac{1}{2^{(n+m)p/2}\Gamma_p\left(\frac{n}{2}\right)\Gamma_p\left(\frac{m}{2}\right)|\Sigma|^{(m+n)/2}}|X|^{(m+n)-2(p+1)/2}|I_p - Y|^{(m-p-1)/2} \times \\ & \exp\left\{-\frac{1}{2}\operatorname{tr}\left(\Sigma^{-1}X\right)\right\}|X|^p \end{aligned}$$

(2) $\square$